

# Stabilité des systèmes non linéaires sous échantillonnage apériodique

Hassan OMRAN<sup>1</sup>, Laurentiu HETEL<sup>1</sup>, Jean-Pierre RICHARD<sup>1,2</sup>, Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LAGIS (CNRS UMR 8219), École Centrale de Lille, 59651 Villeneuve d'Ascq, France.  
*hassan.omran@ec-lille.fr, laurentiu.hetel@ec-lille.fr, jean-pierre.richard@ec-lille.fr.*

<sup>2</sup> INRIA, Projet NON-A, Lille, France.

<sup>3</sup> Laboratoire des Signaux et Systèmes, European Embedded Control Institute (EECI),  
SUPELEC, 3 rue Joliot Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France.  
*lamnabhi@lss.supelec.fr*

*Résumé*— Cet article concerne l'analyse de la stabilité de systèmes non linéaires commandés par un contrôleur échantillonné non nécessairement périodique. Nous supposons qu'il existe une commande qui stabilise le système en temps continu. Lors de l'implantation numérique de cette commande, il s'agit de trouver des conditions préservant la stabilité asymptotique/exponentielle du système sous échantillonnage. Nous proposons d'estimer la borne supérieure des pas d'échantillonnage dans le cas asynchrone (non périodique). Les conditions de stabilité sont formulées à la fois pour la stabilité globale et la stabilité locale. L'idée principale est d'aborder le problème de la stabilité dans le cadre de la dissipativité. Le résultat est ensuite repris dans le cas spécifique des systèmes non linéaires polynomiaux, où les conditions de stabilité sont vérifiées numériquement en utilisant la décomposition en somme des carrés (SOS) et la programmation semi-définie.

*Mots-clés*— Contrôleur échantillonné, stabilité, système non linéaire, dissipativité, méthode de Lyapunov.

## I. INTRODUCTION

La stabilité des systèmes non linéaires échantillonnés est un problème difficile mais intéressant, puisque la mise en œuvre pratique des contrôleurs est généralement numérique. L'approche de l'*émulation* est souvent considérée. Dans cette approche, une commande qui stabilise le système en temps continu est implémentée en utilisant un bloqueur d'ordre zéro (BOZ). Intuitivement, on se doute que des pas d'échantillonnage "suffisamment petits" vont assurer la stabilité : au delà de cette approche qualitative, il est concrètement important d'avoir une estimation quantitative de ce qu'on appelle le *plus grand pas d'échantillonnage permis*. Plusieurs travaux de la littérature se sont penchés sur ce problème (voir par exemple [1], [2] et [3]).

Le cas des systèmes échantillonnés linéaires a été largement étudié : en utilisant des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii et une approche par retard d'entrée [4], [5], [6]; ou bien des techniques issues de la commande robuste [7], [8]; ou encore une approximation polytopique et fonctions de Lyapunov-Razumikhin [9], [10].

Quelques travaux plus rares traitent le cas des systèmes

non linéaires. Dans [1], les résultats génériques sur les systèmes commandés en réseau (NCS) sont spécialisés pour le cas de systèmes échantillonnés : des résultats locaux et globaux sont présentés, ils sont basés sur des systèmes hybrides. Dans [11], la stabilité asymptotique des NCS est étudiée en utilisant la même formulation de systèmes hybrides; les fonctions de Lyapunov sont construites par des techniques de somme des carrés (SOS en abrégé de l'anglais). Dans [3], la notion d'accessibilité séquentielle permet de construire une commande garantissant la stabilisation globale robuste, et l'approche par retard d'entrée est exploitée pour le cas non linéaire.

La notion de dissipativité a été introduite par Willems [12]. Depuis son introduction, cette approche a attiré beaucoup d'attention, car elle peut être utilisée pour étudier la stabilité, la passivité, la robustesse et d'autres problèmes d'analyse et de synthèse. Ces travaux sont inspirés par les propriétés de passivité des circuits électriques, et peuvent être vus comme la généralisation d'une notion abstraite d'énergie pour les systèmes dynamiques.

Récemment, dans [13], nous avons étudié la stabilité asymptotique locale de systèmes échantillonnés bilinéaires commandés par retour d'état linéaire statique, en utilisant l'analyse des sous-ensembles invariants et le théorème de la dissipativité. Les résultats sont prometteurs, mais ne sont pas trivialement applicables pour les systèmes non linéaires.

L'objectif de ce travail est donc d'étendre nos résultats [13] au cas non linéaire. Des conditions suffisantes, basées sur la dissipativité, sont présentées à la fois pour la stabilité asymptotique ou exponentielle, locale ou globale. La robustesse par rapport à la variation du pas d'échantillonnage est également considérée. De plus, nous étudierons le cas particulier des systèmes polynomiaux, où des techniques SOS (somme des carrés) seront utilisées pour extraire des fonctions de stockage et d'alimentation.

L'article est organisé comme suit : le problème est formalisé dans la Section II; dans la Section III, le système est représenté par un modèle équivalent permettant l'analyse de dissipativité; la Section IV présente des conditions suffisantes de stabilité asymptotique/exponentielle; enfin, la Section V illustre les résultats proposés sur deux exemples de systèmes non linéaires.

This work was supported by the European Community Seventh Framework Program [FP7/2007-2013] under grant agreement 257462 :HYCON2 Network of Excellence 'Highly-Complex and Networked Control Systems', by the INTERREG IV A 2 Mers Seas Zeen cross-border cooperation program 2007-2013 under 'SYSIASS 6-20' project, and by the Ministry of Higher Education and Research, Region Nord-Pas de Calais and FEDER through the 'CPER 2007-2013.

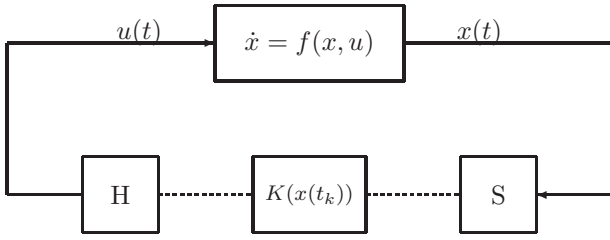


Fig. 1. Commande du système non linéaire avec retour d'état échantillonné.

*Définitions et notations* :  $\mathbb{R}^n$  désigne l'espace euclidien de dimension  $n$ ,  $\mathbb{R}^{n \times m}$  l'ensemble des matrices réelles de dimension  $n \times m$ ,  $P^T$  la transposée de  $P \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\|x\|$  la norme  $L_2$  d'un signal  $x(\cdot)$ .  $\|\Delta\|$  désigne la norme  $L_2$ -induite de l'opérateur  $\Delta$ . Pour  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P > 0$  indique que  $P$  est définie positive,  $P \geq 0$  indique qu'elle semi-définie positive. La notation  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ , avec  $x \in \mathbb{R}^n$ , indique que  $p(x)$  appartient à l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  et à une indéterminée  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Pour  $x_1$  et  $x_2 \in \mathbb{R}^n$ , on note  $(x_1, x_2) = [x_1^T, x_2^T]^T$ . Une fonction  $\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  est dite de classe  $\mathcal{K}$  si elle est continue, nulle en zéro et strictement croissante; de classe  $\mathcal{K}_\infty$  si elle est de classe  $\mathcal{K}$  et non bornée.  $\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  est de classe  $\mathcal{KL}$  si  $\forall t \geq 0$ ,  $\beta(\cdot, t)$  est de classe  $\mathcal{K}$  et si  $\forall s \geq 0$ ,  $\beta(s, \cdot)$  est non-croissante avec  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(s, t) = 0$ .

## II. FORMULATION DU PROBLÈME

On considère le système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad \forall t > t_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  sont respectivement l'état et l'entrée. La fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec  $f(0, 0) = 0$ , est suffisamment lisse pour qu'à chaque  $x(t_0)$  et  $u(\cdot)$  admissible corresponde une et une seule solution sur  $[t_0, \infty)$ .

On suppose qu'il existe une commande  $u(t) = K(x(t))$  qui stabilise l'équilibre  $x = 0$  en temps continu, où  $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une fonction continûment différentiable. On considère les définitions de stabilité suivantes.

*Définition 1* : Le point d'équilibre  $x = 0$  de (1) est *localement uniformément asymptotiquement stable* dans un voisinage  $\mathcal{L}$  de l'équilibre, s'il existe une fonction  $\beta(\cdot, \cdot)$  de classe  $\mathcal{KL}$ , telle que

$$|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x(t_0) \in \mathcal{L}. \quad (2)$$

Il est *globalement uniformément asymptotiquement stable* si (2) est satisfaite pour  $\mathcal{L} = \mathbb{R}^n$ .

*Définition 2* : Le point d'équilibre  $x = 0$  de (1) est *localement exponentiellement stable* dans un voisinage  $\mathcal{L}$  de l'équilibre, si (2) est satisfaite avec :

$$\beta(s, t) = cse^{-\lambda t}, \quad c > 0, \quad \lambda > 0,$$

et *globalement exponentiellement stable* si de plus  $\mathcal{L} = \mathbb{R}^n$ .

On considère l'émulation de la commande  $u = K(x)$  en supposant que :

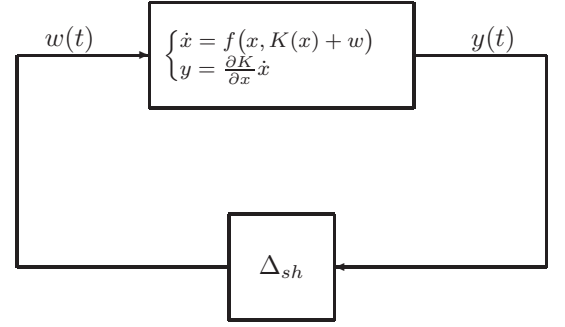


Fig. 2. Représentation équivalente du système échantillonné (3).

- les instants d'échantillonnage  $\{0 = t_0 < t_1, \dots < t_k < \dots\}$  tendent vers l'infini et les pas d'échantillonnage correspondants ont une borne supérieure finie  $h_{max}$  :

$$0 < t_{k+1} - t_k \leq h_{max}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty;$$

- le contrôle est un retour d'état constant par morceaux :

$$u(t) = K(x(t_k)), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}).$$

On obtient alors le système en boucle fermée (Fig.1) :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), K(x(t_k))), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

**Problème** : Notre objectif est de trouver un critère de stabilité asymptotique/exponentielle locale/globale de l'équilibre  $x = 0$  du système non linéaire échantillonné (3).

## III. UNE REPRÉSENTATION ÉQUIVALENTE

On note que le système (3) s'écrit aussi :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), K(x(t)) + w(t)), & \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \\ w(t) = K(x(t_k)) - K(x(t)), \end{cases} \quad (4)$$

ce qui montre que le système échantillonné (3) peut être représenté par le bouclage du système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, K(x) + w), \\ y = \frac{\partial K}{\partial x} \dot{x}, \end{cases} \quad (5)$$

avec l'opérateur  $\Delta_{sh} : y \rightarrow w$  défini par :

$$w(t) = (\Delta_{sh} y)(t) = - \int_{t_k}^t y(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (6)$$

Cette représentation est montrée dans la Fig.2. On remarque que l'effet des variations des pas d'échantillonnage est modélisé par l'opérateur  $\Delta_{sh}$ . Cette approche est considérée dans [7] et [8] avec l'objectif d'étudier la stabilité des systèmes échantillonnés linéaires. Dans [7], une limite supérieure sur le gain de l'opérateur  $\Delta_{sh}$  est trouvée. Il est montré que  $\|\Delta_{sh}\| \leq \delta_0$  avec  $\delta_0 = \frac{2}{\pi} h_{max}$ . Cette limite est atteinte ( $\|\Delta_{sh}\| = \delta_0$ ) pour  $t_{k+1} - t_k = h_{max}$ . Des conditions de stabilité basées sur le théorème du petit gain

sont fournies sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Dans [8], la propriété précédente est associée à une propriété de passivité pour trouver des conditions moins contraignantes. Le résultat est basé sur des techniques de commande robuste, utilisant une approche fréquentielle et le lemme de Kalman-Yakubovich-Popov.

Les méthodes de [7] et [8] sont développées pour les systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI), mais ne sont pas applicables pour le cas non linéaire. Dans [13], les propriétés de l'opérateur sont utilisées pour étudier la stabilité de systèmes bilinéaires échantillonnés, en utilisant le théorème de dissipativité. Les lemmes suivants y sont démontrés, se basant sur le travail de Fujioka [8].

*Lemme 1 :* [13] Soit  $\Delta_{sh}$  l'opérateur défini en (6). Pour tous  $y \in L_2[0, h_{max})$  et  $0 < X^T = X \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , l'inégalité suivante est satisfaite pour  $t \in [t_k, t_{k+1})$  :

$$\mathbf{I}_1(t) = \int_{t_k}^t (\Delta_{sh}y)^T(\tau)X(\Delta_{sh}y)(\tau) - \delta_0^2 y^T(\tau)Xy(\tau) d\tau \leq 0. \quad (7)$$

*Lemme 2 :* [13] Soit  $\Delta_{sh}$  l'opérateur défini en (6). Pour tous  $y \in L_2[0, h_{max})$  et  $0 \leq Y^T = Y \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , l'inégalité suivante est satisfaite pour  $t \in [t_k, t_{k+1})$  :

$$\mathbf{I}_2(t) = \int_{t_k}^t (\Delta_{sh}y)(\tau)^T Y y(\tau) + y^T(\tau)Y(\Delta_{sh}y)(\tau) d\tau \leq 0. \quad (8)$$

Nous proposons ici d'exploiter ces lemmes afin de développer un critère de stabilité pour le contrôle échantillonné des systèmes non linéaires (non limités aux bilinéaires). Notre approche s'inspire de la notion de *dissipativité exponentielle* [14].

#### IV. PRINCIPAUX RÉSULTATS

##### A. Analyse de stabilité

*Théorème 1 :* Soient le système non linéaire échantillonné (3) et sa représentation équivalente (5), (6). On définit  $\delta_0 = \frac{2}{\pi}h_{max}$  et on introduit la forme quadratique :

$$\mathbf{S}(y(t), w(t)) = \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\delta_0^2 X & Y \\ Y & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

avec  $0 < X^T = X \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et  $0 \leq Y^T = Y \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Considérons un voisinage  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  de l'équilibre  $x = 0$  et une fonction différentiable définie positive  $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$  pour laquelle il existe des fonctions  $\beta_1$  et  $\beta_2$  de classe  $\mathcal{K}$ , telles que :

$$\beta_1(|x|) \leq V(x) \leq \beta_2(|x|), \quad \forall x \in \mathcal{D}. \quad (10)$$

Si, pour un  $\alpha > 0$  et pour tout  $x(t) \in \mathcal{D}$ ,  $V$  satisfait :

$$\dot{V}(x(t)) + \alpha V(x(t)) \leq \mathbf{S}(y(t), w(t)), \quad (11)$$

$$\dot{V}(x(t)) + \alpha V(x(t)) \leq \mathbf{S}(y(t), w(t))e^{-\alpha h_{max}}, \quad (12)$$

alors l'équilibre  $x = 0$  du système (3) est localement uniformément asymptotiquement stable.

De plus, considérons les ensembles définis par  $V(\cdot)$  et un scalaire  $c > 0$  :

$$\mathcal{L}_c := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}. \quad (13)$$

Alors, l'ensemble  $\mathcal{L}_{c^*}$  défini par la surface de niveau maximal de  $V$  contenue dans  $\mathcal{D}$  :

$$c^* = \max_{\mathcal{L}_c \subset \mathcal{D}} c \quad (14)$$

est une estimation de domaine d'attraction de  $x = 0$ .

Enfin, si toutes les conditions sont satisfaites globalement avec des fonctions  $\beta_1$  et  $\beta_2$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$ , alors  $x = 0$  est globalement uniformément asymptotiquement stable.

*Preuve 1 :* Pour montrer la stabilité du système échantillonné, on considère d'abord la fonction :

$$W(t) = V(x(t))e^{\alpha(t-t_k)} - \int_{t_k}^t \mathbf{S}(y(\tau), w(\tau)),$$

pour  $t \in [t_k, t_{k+1})$ . Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= \left[ \dot{V}(x(t)) + \alpha V(x(t)) \right] e^{\alpha(t-t_k)} - \mathbf{S}(y(t), w(t)), \\ &= \left[ \dot{V}(x(t)) + \alpha V(x(t)) - \mathbf{S}(y(t), w(t)) \right] e^{\alpha(t-t_k)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Remarquons que pour tous  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , le terme  $e^{-\alpha(t-t_k)}$  est dans  $[e^{-\alpha h_{max}}, 1]$  et il existe  $\theta(t) \in [0, 1]$  tel que  $e^{-\alpha(t-t_k)} = \theta(t) + (1 - \theta(t))e^{-\alpha h_{max}}$ . En multipliant (11) et (12) respectivement par  $\theta(t)$  et  $1 - \theta(t)$  et en prenant la somme des inégalités obtenues, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) + \alpha V(x(t)) - \mathbf{S}(y(t), w(t))e^{-\alpha(t-t_k)} &\leq 0, \\ \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall x(t) \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (16)$$

À partir de (15) et (16) on obtient :

$$\dot{W}(t) \leq 0, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall x(t) \in \mathcal{D}. \quad (17)$$

En intégrant  $\dot{W}(\cdot)$  de  $t_k$  à  $t$  il vient :

$$\int_{t_k}^t \dot{W}(s) ds \leq 0 \Rightarrow W(t) \leq W(t_k),$$

$$V(x(t))e^{\alpha(t-t_k)} - \int_{t_k}^t \mathbf{S}(y(\tau), w(\tau)) \leq V(t_k). \quad (18)$$

Par les Lemmes 1 et 2, on peut voir que le terme intégral dans la dernière équation satisfait :

$$\int_{t_k}^t \mathbf{S}(y(\tau), w(\tau)) = \mathbf{I}_1(t) + \mathbf{I}_2(t) \leq 0, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (19)$$

où  $\mathbf{I}_1(t)$  et  $\mathbf{I}_2(t)$  sont définis respectivement dans (7) et (8). À partir de (19) et (18) on obtient :

$$V(x(t)) \leq e^{-\alpha(t-t_k)} V(x(t_k)), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall x(t) \in \mathcal{D}. \quad (20)$$

L'ensemble  $\mathcal{L}_{c^*}$  est clairement positivement invariant [15], il est le plus grand ensemble de niveau contenu dans  $\mathcal{D}$ . Considérons une condition initiale  $x_0 \in \mathcal{L}_{c^*}$ . En prolongeant, (20) entraîne :

$$V(x(t)) \leq e^{-\alpha(t-t_0)} V(x(t_0)), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x_0 \in \mathcal{L}_{c^*}. \quad (21)$$

De (10) et (21), on déduit que toute solution issue de  $x(t_0) \in \mathcal{L}_{c^*}$  satisfait :

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \beta_1^{-1}(V(x(t_0))e^{-\alpha(t-t_0)}) \\ &\leq \beta_1^{-1}(\beta_2(|x(t_0)|)e^{-\alpha(t-t_0)}) \\ &:= \beta(|x(t_0)|, t-t_0), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x(t_0) \in \mathcal{L}_{c^*}. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que la fonction  $\beta(\cdot, \cdot)$  est de classe  $\mathcal{KL}$ . Alors,  $x = 0$  est localement uniformément asymptotiquement stable. Finalement, si toutes les conditions sont satisfaites globalement, avec des fonctions  $\beta_1$  et  $\beta_2$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$ , alors  $x = 0$  est globalement uniformément asymptotiquement stable.

*Corollaire 1* : Supposons que toutes les conditions du Théorème 1 sont satisfaites pour :

$$\beta_1(|x|) \geq k_1|x|^q, \quad \beta_2(|x|) \leq k_2|x|^q, \quad \text{avec } k_1, k_2, q > 0. \quad (22)$$

Alors, l'équilibre  $x = 0$  est localement exponentiellement stable. De plus, l'ensemble  $\mathcal{L}_{c^*}$  défini dans (14) et (13), est une estimation de domaine d'attraction. Si les conditions sont satisfaites globalement, alors  $x = 0$  est globalement exponentiellement stable.

*Preuve 2* : En suivant les mêmes étapes que dans la preuve du Théorème 1, on obtient :

$$V(x(t)) \leq e^{-\alpha(t-t_0)}V(x(t_0)), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x_0 \in \mathcal{L}_{c^*},$$

puis, par (10) et (22) :

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \left( \frac{V(x(t_0))e^{-\alpha(t-t_0)}}{k_1} \right)^{1/q} \leq \left( \frac{k_2|x(t_0)|^q e^{-\alpha(t-t_0)}}{k_1} \right)^{1/q} \\ &= \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^{1/q} |x(t_0)| e^{-(\alpha/q)(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x(t_0) \in \mathcal{L}_{c^*}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $x = 0$  est localement exponentiellement stable. Si toutes les conditions sont satisfaites globalement, la stabilité exponentielle globale est directe.

### B. Cas particulier des systèmes polynomiaux

Plusieurs phénomènes physiques (contrôle de procédés, biologie, robotique, systèmes électriques) peuvent être modélisés ou approchés par des équations différentielles polynomiales. Pour cette classe, la décomposition en somme des carrés et la programmation semi-définie [16] sont des techniques très utiles, déjà utilisées dans plusieurs problèmes d'analyse et de synthèse [17].

Dans cette section, nous spécialiserons les résultats précédents au cas des systèmes échantillonnés polynomiaux. Cette restriction nous permettra de proposer une *méthode constructive* pour la recherche de fonctions de stockage et d'alimentation satisfaisant les conditions de stabilité asymptotique/exponentielle proposées dans la section précédente.

Considérons le problème de stabilité défini dans la Section II pour le cas particulier où  $f(x, u)$  et  $K(x)$  sont des fonctions polynomiales. Le système (5) est défini par des fonctions polynomiales  $F(x, w) := f(x, K(x) + w)$  et  $G(x, w) := \frac{\partial K}{\partial x} F(x, w)$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, w), \\ y = G(x, w). \end{cases} \quad (23)$$

Vérifier les inégalités de dissipativité du Théorème 1 revient à un problème de test de négativité sur des polynômes. Ceci se constate sur les équations (9) et (23), puisque (11) et (12) sont respectivement équivalentes à :

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\frac{\partial V}{\partial x} F(x, w) - \alpha V(x) \\ &\quad + [-\delta_0^2 G^T(x, w) X G(x, w) + 2G^T(x, w) Y w + w^T Y w], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\frac{\partial V}{\partial x} F(x, w) - \alpha V(x) \\ &\quad + [-\delta_0^2 G^T(x, w) X G(x, w) + 2G^T(x, w) Y w + w^T Y w] e^{-\alpha h_{max}}, \end{aligned}$$

pour tout  $x(t) \in \mathcal{D}$ . En fait, les dernières inégalités concernent des polynômes de la forme  $p(\xi) \geq 0$ , où  $p(\xi) \in \mathbb{R}[\xi]$ , et  $\xi = (x, w)$ .

Il est bien connu que la vérification de positivité d'un polynôme multivarié est un problème difficile. Des méthodes récentes permettent cependant de simplifier ce problème en utilisant la décomposition en somme des carrés (SOS) et la programmation semi-définie. Ces méthodes testent si le polynôme est une somme des carrés, ce qui est suffisant pour assurer sa positivité semi-définie.

*Définition 3* : [17] Un polynôme multivarié  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  est une somme de carrés (SOS) s'il existe  $p_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ ,  $i \in \{1, \dots, M\}$ , tels que  $p(x) = \sum_{i=1}^M p_i^2(x)$ .

La littérature (voir l'article de synthèse [17]) semble suggérer que cette approche (conditions suffisantes) est finalement peu conservative. Néanmoins, on doit noter que la complexité des calculs pour tester si un polynôme  $p(x)$  est SOS augmente rapidement avec le degré de  $p(x)$ .

Dans ce qui suit, on reformule le Théorème 1 et le Corollaire 1 en utilisant une méthode de somme des carrés. L'applicabilité locale des conditions de dissipativité, dans une région  $\mathcal{D}$ , est garantie en utilisant une technique similaire à la S-procédure [18]. Notons que l'on doit s'assurer que la fonction de stockage est définie positive et qu'il n'est donc pas suffisant de s'assurer qu'elle se compose en somme des carrés (qui ne garantit que la positivité semi-définie). Afin de régler ce problème, nous utiliserons la proposition suivante.

*Proposition 1* : [17] Soient deux polynômes de degré  $2d$ ,  $V(x) \in \mathbb{R}[x]$  et :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \epsilon_{ij} x_i^{2j}, \quad \text{tel que } \sum_{j=1}^d \epsilon_{ij} > \gamma, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (24)$$

avec  $\gamma > 0$  et  $\epsilon_{ij} \geq 0$  pour tout  $i, j$ . Alors, la condition :

$$[V(x) - \varphi(x)] \text{ est SOS} \quad (25)$$

garantit que  $V(x)$  est définie positive.

*Corollaire 2* : On considère le système échantillonné (3) dans le cas où  $f(x, u)$  et  $K(x)$  sont des fonctions polynomiales, ainsi que la représentation (6), (23) et  $\delta_0 = \frac{2}{\pi} h_{max}$ . Soit  $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_l(x) \geq 0, l = 1, 2, \dots, s\}$  un voisinage de  $x = 0$ . Supposons qu'il existe un polynôme  $V(x) \in \mathbb{R}[x]$  et des sommes des carrés  $\sigma_l(\xi)$  et  $\varsigma_l(\xi)$ , avec  $l \in \{1, \dots, s\}$  et  $\xi = (x, w)$ , tels que les polynômes suivants sont des

sommes des carrés :

$$\hat{V}(x) = V(x) - \varphi(x), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \rho_1(\xi) = & - \sum_{l=1}^s \sigma_l(\xi) \mu_l(x) - \frac{\partial V}{\partial x} F(x, w) - \alpha V(x) \\ & + [-\delta_0^2 G^T(x, w) X G(x, w) + 2G^T(x, w) Y w + w^T Y w], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \rho_2(\xi) = & - \sum_{l=1}^s \varsigma_l(\xi) \mu_l(x) - \frac{\partial V}{\partial x} F(x, w) - \alpha V(x) \\ & + [-\delta_0^2 G^T(x, w) X G(x, w) + 2G^T(x, w) Y w + w^T Y w] e^{-\alpha h_{max}}. \end{aligned} \quad (28)$$

avec  $0 < X^T = X \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $0 \leq Y^T = Y \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et  $\varphi(x)$  un polynôme défini positif de type (24). Alors, l'équilibre  $x = 0$  du système (3) est localement uniformément asymptotiquement stable. De plus, l'ensemble  $\mathcal{L}_{c^*}$  défini dans (13), (14), est une estimation du domaine d'attraction. Finalement, si (27) et (28) sont des sommes des carrés avec  $\mu_l(x) = 0$ , et pour tout  $l \in \{1, 2, \dots, s\}$ , alors l'équilibre est globalement uniformément asymptotiquement stable.

*Preuve 3 :* D'abord, on note que par (26) et la Proposition 1, la fonction  $V(x)$  est définie positive et radialement non bornée ( $V(x) \rightarrow \infty$  quand  $\|x\| \rightarrow \infty$ ). Donc, par le Lemme 4.3 de [15], il existe des fonctions  $\beta_1$  et  $\beta_2$  de classe  $\mathcal{K}$ , telles que :

$$\beta_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \beta_2(\|x\|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Quand  $x(t) \in \mathcal{D}$ , autrement dit  $\mu_l(x) \geq 0$  pour tout  $l \in \{1, 2, \dots, s\}$ , par la positivité de  $\sigma_l(\xi)$  ( $\varsigma_l(\xi)$ ) on a  $\rho_1(\xi) \geq 0$  ( $\rho_2(\xi) \geq 0$ ). Par conséquent, toutes les conditions du Théorème 1 sont satisfaites. Le cas où (27) et (28) sont des sommes de carrés pour  $\mu_l(x) = 0 \forall l \in \{1, 2, \dots, s\}$  satisfait clairement les conditions de stabilité globale du Théorème 1.

*Corollaire 3 :* Supposons que toutes les conditions du Corollaire 2 soient satisfaites et que la fonction de stockage  $V(x)$  satisfasse :

$$k_1 \|x\|^q \leq V(x) \leq k_2 \|x\|^q, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (29)$$

Alors, l'équilibre  $x = 0$  est localement exponentiellement stable. De plus, l'ensemble  $\mathcal{L}_{c^*}$  défini dans (13), (14) est une estimation du domaine d'attraction. Si les conditions sont satisfaites globalement, alors  $x = 0$  est globalement exponentiellement stable.

*Preuve 4 :* La preuve suit les mêmes étapes que le Corollaire 2 et est un résultat direct du Corollaire 1.

## V. EXEMPLES

On applique maintenant les méthodes proposées sur deux systèmes non linéaires. D'abord, on considère un exemple de [1], où l'on cherche le plus grand pas d'échantillonnage préservant la stabilité globale asymptotique du système échantillonné. Ensuite, on considèrera un autre exemple qui illustrera l'applicabilité des résultats pour étudier la stabilité locale exponentielle.

### A. Exemple 1

On considère le système suivant, issu de [1] :

$$\dot{x} = dx^2 - x^3 + u,$$

avec un paramètre variable et borné  $|d| \leq 1$  et une commande  $u = K(x) = -2x$ . L'émulation discrète de cette loi de commande donne un système échantillonné représenté par l'opérateur  $\Delta_{sh}$  de (6) et le système (5) :

$$\begin{cases} \dot{x} = dx^2 - x^3 - 2x + w, \\ y = -2(dx^2 - x^3 - 2x + w). \end{cases}$$

On applique le Corollaire 2 afin de trouver une fonction de stockage de la forme  $V(x) = ax^2 + bx^4$ , telle que (26), (27) et (28) soient des sommes des carrés. On choisit  $\varphi(x) = 10^{-3}x^2$ ,  $\alpha = 0.1$  et  $h_{max} = 0.72$ . Notre objectif est de vérifier la stabilité globale. Dans ce cas, les polynômes (27) et (28) sont :

$$\begin{aligned} \rho_1(\xi) = & -(2ax + 4bx^3)(dx^2 - x^3 - 2x + w) - \alpha(ax^2 + ax^4) \\ & + [-4\delta_0^2 X(dx^2 - x^3 - 2x + w)^2 \\ & - 4Y(dx^2 - x^3 - 2x + w)w + Yw^2], \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \rho_2(\xi) = & -(2ax + 4bx^3)(dx^2 - x^3 - 2x + w) - \alpha(ax^2 + ax^4) \\ & + [-4\delta_0^2 X(dx^2 - x^3 - 2x + w)^2 \\ & - 4Y(dx^2 - x^3 - 2x + w)w + Yw^2] e^{-\alpha h_{max}}, \end{aligned} \quad (31)$$

où  $a, b, X, Y$  sont des variables à définir. Remarquons que les termes  $d$  et  $d^2$  apparaissent dans les polynômes. Cependant, si (30) et (31) sont des sommes des carrés pour tout  $(d, d^2) \in \{(1, 0), (1, 1), (-1, 0), (-1, 1)\}$ , alors ils sont des sommes des carrés pour tout  $d(t)$  variant dans le temps  $|d| \leq 1$ . On le vérifie en utilisant le logiciel SOSTOOLS [19] pour une fonction de stockage  $V(x) = 0.77402x^2 + .19911x^4$  et pour une fonction d'alimentation (9) définie par  $X = 0.47522$  et  $Y = 0.62302 \cdot 10^{-3}$ . En appliquant le Corollaire 2, on obtient la stabilité globale uniforme asymptotique de l'équilibre  $x = 0$  du système échantillonné. Notons qu'il est impossible de trouver une solution en cherchant une fonction de stockage quadratique.

En choisissant  $\alpha$  (taux de décroissance de la fonction de stockage) plus grand, on trouve que le problème a une solution pour un  $h_{max}$  plus petit (voir Fig. 3). Plusieurs travaux ont considéré cet exemple avec comme objectif d'estimer le plus grand pas d'échantillonnage conservant la stabilité. Les estimations obtenues sont  $h_{max} = 0.368$  [1] et  $h_{max} = 0.1428$  [2]. Les conditions proposées dans ce travail sont satisfaites pour  $h_{max} = 0.72$ .

### B. Exemple 2

On considère maintenant le système :

$$\dot{x} = x^2 + (x - 1)u,$$

avec la commande en temps continu  $u = K(x) = x + 2x^2$  qui stabilise, *seulement localement*, l'équilibre  $x = 0$ . Notre objectif est de trouver le plus grand  $h_{max}$  qui garantit la stabilité locale exponentielle de  $x = 0$  lorsque la commande est émulée. On considère le voisinage  $x \in [-0.4, +0.4]$ . Le système échantillonné peut être représenté par l'opérateur  $\Delta_{sh}$  de (6) et le système (5) décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2x^3 + (x - 1)w, \\ y = (1 + 4x)(-x + 2x^3 + (x - 1)w). \end{cases}$$

On applique le Corollaire 3 avec une fonction de stockage quadratique  $V(x) = ax^2$ . Remarquons que  $V(x)$  satisfait

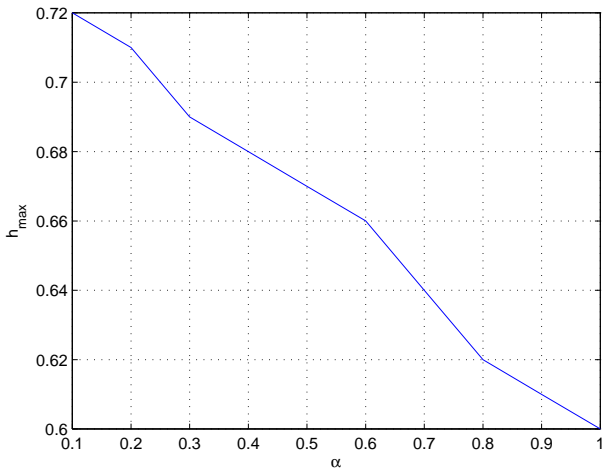


Fig. 3. Compromis entre le taux de décroissance exponentielle  $\alpha$  et l'intervalle d'échantillonnage maximal  $h_{max}$ .

(29) avec  $k_1 = k_2 = a$  et  $q = 2$ . On choisit  $\varphi(x) = 10^{-3}x^2$ ,  $\alpha = 0.25$  et  $h_{max} = 0.6$ . Le domaine considéré  $\mathcal{D}$  est décrit par  $\{x \in \mathbb{R} : \mu_1(x) \geq 0\}$  avec  $\mu_1(x) = (x + 0.4)(0.4 - x)$ . Dans ce cas, les polynômes (27) et (28) sont :

$$\begin{aligned} \rho_1(\xi) = & -\sigma_1(\xi)\mu_1(x) - (2ax)(-x + 2x^3 + (x-1)w) - \alpha(ax^2) \\ & + [-\delta_0^2 X(1+4x)^2(-x + 2x^3 + (x-1)w)^2 \\ & + 2Y(1+4x)(-x + 2x^3 + (x-1)w)w + Yw^2], \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \rho_2(\xi) = & -\varsigma_1(\xi)\mu_1(x) - (2ax)(-x + 2x^3 + (x-1)w) - \alpha(ax^2) \\ & + [-\delta_0^2 X(1+4x)^2(-x + 2x^3 + (x-1)w)^2 \\ & + 2Y(1+4x)(-x + 2x^3 + (x-1)w)w + Yw^2]e^{-\alpha h_{max}}, \end{aligned} \quad (33)$$

où  $a, X, Y$  sont des variables à définir et les sommes de carrés  $\sigma_1(\xi), \varsigma_1(\xi)$  sont des polynômes à définir. En utilisant le logiciel SOSTOOLS, on trouve que (32) et (33) sont des sommes de carrés avec  $a = 0.12015$ ,  $X = 0.25506$ ,  $Y = 0.88456 \cdot 10^{-2}$  et les polynômes :

$$\begin{aligned} \sigma_1(\xi) = & 0.62335 w^2 - 0.3616 xw^2 + 1.6714 x^2w^2 \\ & - 0.67622 x^3w + 2.0314 x^4w + 3.228 x^6, \\ \varsigma_1(\xi) = & 0.52025 w^2 - 0.31686 xw^2 + 1.4349 x^2w^2 \\ & - 0.54824 x^3w + 1.60754 x^4w + 2.8846 x^6. \end{aligned}$$

Alors, toutes les conditions du Corollaire 3 sont satisfaites et  $x = 0$  est localement exponentiellement stable. Il est facile de voir que l'estimation de domaine d'attraction  $\mathcal{L}_{c^*}$  est le domaine étudié  $[-0.4, +0.4]$ .

## VI. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons proposé des conditions suffisantes pour la stabilité des systèmes non linéaires échantillonnés. L'idée principale est d'utiliser le théorème de dissipativité pour estimer le plus grand pas d'échantillonnage qui garantit la stabilité asymptotique/exponentielle. Ces résultats ont ensuite été particularisés pour les systèmes polynomiaux, pour lesquels la technique peut devenir constructive grâce à une décomposition SOS (en somme de carrés) associée à la programmation

semi-définie. Une première illustration a montré l'intérêt de cette approche sur un exemple de la littérature ; le second exemple a concerné la stabilisation exponentielle locale sous échantillonnage.

## RÉFÉRENCES

- [1] D. Nešić, A. Teel, and D. Carnevale, "Explicit computation of the sampling period in emulation of controllers for nonlinear sampled-data systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 3, pp. 619–624, 2009.
- [2] I. Karafyllis and C. Kravaris, "Global stability results for systems under sampled-data control," *Int. J. Robust Nonlin. Control*, vol. 19, pp. 1105–1128, sep. 2008.
- [3] —, "Robust global stabilizability by means of sampled-data control with positive sampling rate," *International Journal of Control*, vol. 82, no. 4, pp. 755–772, 2009.
- [4] E. Fridman, A. Seuret, and J.-P. Richard, "Robust sampled-data stabilization of linear systems : an input delay approach," *Automatica*, vol. 40, pp. 1441–1446, 2004.
- [5] E. Fridman, "A refined input delay approach to sampled-data control," *Automatica*, vol. 46, no. 2, pp. 421–427, 2010.
- [6] A. Seuret, "A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings," *Automatica*, vol. 48, no. 1, pp. 177–182, 2012.
- [7] L. Mirkin, "Some remarks on the use of time-varying delay to model sample-and-hold circuits," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 6, pp. 1109–1112, 2007.
- [8] H. Fujioka, "Stability analysis of systems with aperiodic sample-and-hold devices," *Automatica*, vol. 45, pp. 771–775, 2009.
- [9] L. Hetel, A. Kruszewski, W. Perruquetti, and J. Richard, "Discrete and intersample analysis of systems with aperiodic sampling," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, no. 7, pp. 1696–1701, 2011.
- [10] C. Fiter, L. Hetel, W. Perruquetti, and J.-P. R. Richard, "A state dependent sampling for linear state feedback," *Automatica*, vol. 48, no. 8, pp. 1860–1867, 2012.
- [11] N. Bauer, P. Maas, and W. Heemels, "Stability analysis of networked control systems : A sum of squares approach," *Automatica*, vol. 48, no. 8, pp. 1514–1524, 2012.
- [12] J. Willems, "Dissipative dynamical systems. part i : general theory," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 45, no. 5, pp. 321–351, 1972.
- [13] H. Omran, L. Hetel, and J.-P. Richard, "Local stability of bilinear systems with asynchronous sampling," in *The 4th IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, jun. 2012.
- [14] V. Chellaboina and W. M. Haddad, "Exponentially dissipative nonlinear dynamical systems : a nonlinear extension of strict positive realness," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 1, pp. 25–45, 2003.
- [15] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2002.
- [16] P. A. Parrilo, "Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization," Ph.D. dissertation, California Institute of Technology, Pasadena, CA, 2000.
- [17] A. Papachristodoulou and S. Prajna, "A tutorial on sum of squares techniques for systems analysis," in *American Control Conference*, vol. 4, jun. 2005, pp. 2686–2700.
- [18] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, ser. Studies in Applied Mathematics. SIAM, 1994.
- [19] A. P. S. Prajna and P. A. Parrilo, "Introducing sostoools : A general purpose sum of squares programming solver," in *The 41st IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 1, dec. 2002, pp. 741–746.